

Γενικεύσεις

Μελέτη της εξίσωσης $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Ερώτηση: Να προσδιοριστεί τι είδους είναι η καμπύλη και να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της ~~μορφής~~ μορφολογία

(Εύρεση, ~~μορφολογία~~ ^{υποβολή} $\rightarrow$ ελαφρύ αδροίωμα, εστίες
 παραβολή $\rightarrow$ εστία, διευθετούσα στην κορυφή $ta(1)$)

Μεθοδολογία

Θεωρούμε την τετραγωνική κορυφή της εξίσωσης την $q: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$
 με υπό $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

Ορίζεται ο πίνακας A της τετραγωνικής κορυφής $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I_2 = A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\det(A - \lambda I_2)$

1) Βρίσκω ιδιοτιμές λ_1, λ_2 εξισώοντας με το 0

2) Ιδιοδιανύσματα: θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x,y) = \lambda_1(x,y)$ για την ιδιοτιμή λ_1 και $\varphi(x,y) = \lambda_2(x,y)$ για την ιδιοτιμή λ_2

Η εξίσωση $\varphi(x,y) = \lambda_1(x,y)$ δίνει σε μια γραμμική άμεση εξίσωση της κορυφής $a_1x + b_1y = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x$

$$\text{Ο ιδιοχώρος } V(\lambda_1) = \left\{ \left(x, -\frac{a_1}{b_1}x \right) \right\} = \left\{ x \left(1, -\frac{a_1}{b_1} \right) \right\} = \left\langle \left(1, -\frac{a_1}{b_1} \right) \right\rangle$$

Αντίστοιχα για την άλλη ιδιοτιμή βρίσκω $V(\lambda_2)$

3) Κανονικοποίηση: Βρίσκω $u_1 \in V(\lambda_1)$ με $\|u_1\| = 1$ ~~$\perp$~~

$$\text{Έστω } u_1 = x \left(1, -\frac{a_1}{b_1} \right) \Rightarrow \left\| x \left(1, -\frac{a_1}{b_1} \right) \right\|^2 = 1 \Rightarrow x^2 \left(1 + \frac{a_1^2}{b_1^2} \right) = 1 \Rightarrow$$

παιρνω το $x > 0$. Ομοίως εφαρμόζω και για $u_2 \in V(\lambda_2)$ με $\|u_2\| = 1$. Άρα βρίσκω $u_1 = (p_1, p_2)$, $u_2 = (p_3, p_4)$, $u_1 \perp u_2$

Αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1 \times 2}$

4) Φαίνω τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$, ορίζεται η απεικόνιση $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με $g(x, y) = (x, y)P^T$ και $g^{-1}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$g^{-1}(x, y) = (x, y)P, \quad g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

Τότε $g_1 = p_{21} \circ g$, $g_2 = p_{22} \circ g$. Τώρα παίρνω την εξίσωση $\gamma \circ g_1(x, y) + \delta \circ g_2(x, y) = \gamma x + \delta y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

Με αγνίζοντας τα γ, δ δέσσω $(x, y) = e_1 = (1, 0)$ και $(x, y) = e_2 = (0, 1)$ και φαίνω ένα γρ. ευσταθές με 2 αγνίζοντας τα γ, δ και υπολογίζω τα γ, δ . Έτσι ορίζεται η εξής εξίσωση:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x + \delta_0 y + j = 0$$

Διακρίνω περιπτώσεις

1) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ (έλλειψη ή υπερβολή) δέσσω $c = (c_1, c_2) = \left(-\frac{\gamma_0}{2\lambda_1}, -\frac{\delta_0}{2\lambda_2} \right)$

Θεωρώ την απεικόνιση $F: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με $F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x + \delta_0 y + j$

ορίζω την καμπύλη $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} / \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F(c_0) = 0\}$

Τότε η απεικ. μας εξίσωση $C = (g^{-1} \circ t_{c_0})(C_0)$ όπου $t_{c_0}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} / ax^2 + bxy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + j = 0\}$$

Η απεικ. καμπύλη C έχει εστίες $(g^{-1} \circ t_{c_0})(e_1)$, $(g^{-1} \circ t_{c_0})(e_2)$ και εσάδους ~~ε~~ αθροίσμα $2c$.

$$2) \quad d_1 = 0, d_2 \neq 0$$

Θεωρούμε $c_2 = -\frac{\delta_0}{2d_2}$ και από την εξίσωση $f(c_0) = 0$ βρίσκουμε το

c_1 . Έτσι έχουμε ως $c_0 = (c_1, c_2)$ είναι γραμμική ως προς c_2

Τότε η εξίσωση $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid d_2 y^2 = -p_0 x\}$ θα είναι παραβολή

Από την μορφή της $y^2 = \frac{p_0}{d_2} x$, $y^2 = p x$

παράμετρος της παραβολής $p > 0$ ή $p < 0$

έτσι το $\epsilon = (\frac{p}{2}, 0)$ και διαθεσικό $x = -\frac{p}{2}$

Η ομογενής εξίσωση C είναι η παραβολή $C = (g^{-1} \circ t_0)(C_0)$

όπου $t_0: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με νόμο $t_0(v) = C_0 + v$, $\forall v \in \mathbb{R}$

Εάν είναι $\omega \in \epsilon' = (g^{-1} \circ t_0)(\epsilon)$ και διαθεσικό $(g^{-1} \circ t_0)(\delta) = \delta'$

Συνολικά παίρνουμε $t_0(-\frac{p}{2}, y) = \dots = (x_1, y_1)$ ή

$$g^{-1}(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Από (1) και (2) θα πάρουμε $t_u(u)$

Παράδειγμα

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6 = 0$$

$$q(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\text{Ιδιοτιμές } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$$

$$\text{Θεωρώ την } \varphi: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \text{ με νόμο } \varphi(x, y) = (x, y) \cdot A \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Τα ιδιοδιανύσματα της φ (και της A) προκύπτουν από τις εξισώσεις

$$\varphi(x, y) = 1(x, y) \quad \text{και} \quad V(1) = \langle (-2, 1) \rangle$$

$$\varphi(x, y) = 6(x, y) \quad V(6) = \langle (1, 2) \rangle$$

$$\text{Κάνω κανονικοποίηση } \|(x, -2, 1)\| = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Όπως } \|(x, 1, 2)\| = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Τα ορθοκανονικά διανύσματα είναι } u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \text{ και } V(1)$$

$$\text{και } u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \text{ και } V(6)$$

$$\text{Ορίζεται τον ορθογώνιο πίνακα } P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ορίζεται την } g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \text{ με νόμο } g(x, y) = (x, y) \cdot P^t \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y), \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$g^{-1}(x,y) = (x,y) \text{ P}$$

Εδώ ισχύει ότι $g^{-1} = g$ άρα $P = P^t$

Θέτουμε $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6 = 0\}$

$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid x^2 + 6y^2 - 6 = 0\}$$

~~22~~ $\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ οι ιδιοτιμές που βρήκα

Το σταθερό άθροισμα είναι το $2\sqrt{6}$, $b=1$, $\gamma=-\sqrt{5}$

Η εστία της C' είναι $E_1 = (\sqrt{5}, 0)$ και $E_2 = (-\sqrt{5}, 0)$

$$C = g^{-1}(C')$$

$$E_1' = g^{-1}(E_1) \quad E_2' = g^{-1}(E_2)$$

$$E_1' = (-2, 1) \quad E_2' = (2, -1)$$

Το σταθερό άθροισμα είναι το ίδιο με το C δηλαδή $2\sqrt{6}$

Παράδειγμα

$$x^2 + 2xy + y^2 + ax + by + \gamma = 0$$

Υποθέτουμε ότι $a, b, \gamma \neq 0$

Η τετραγωνική μορφή είναι η $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda$$

0, ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$

Θεωρούμε $\varphi: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με νόμο $\varphi(x, y) = (x, y) \cdot A \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

Ιδιοδιανύσματα της φ : $\varphi(x, y) = 0(x, y) = (0, 0) \quad , \quad \forall(0) = \langle (2, -1) \rangle$
 $\varphi(x, y) = 2(x, y) \quad , \quad \forall(2) = \langle (1, 1) \rangle$

Κανονικοποίηση: Παίρνω $u_1 \in \forall(0)$ με $\|u_1\| = 1 \Rightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$u_2 \in \forall(2)$ με $\|u_2\| = 1 \Rightarrow u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Ορίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ορίζουμε την ισοτιμία $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με νόμο $g(x, y) = (x, y) P^t$
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x-y), \frac{1}{\sqrt{2}} (x+y) \right)$$

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x-y) \\ g_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x+y) \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Το γραμμικό μέρος της αριστερής πλευράς είναι το $ax + by$

Εστω φάσματα $\mu, \delta_0 \in \mathbb{R}$: $\mu g_1(x, y) + \delta_0 g_2(x, y) = ax + by$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

-4-

και παίρνω για $e_1 = (1, 0) \rightarrow p_0 + s_0 = \sqrt{2}a$
 $e_2 = (0, 1) \rightarrow -p_0 + s_0 = \sqrt{2}b$ $\Rightarrow p_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$
 και $s_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

Βρίσκω $c_2 = \frac{\frac{1}{16}(a+b)^2 - \gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)}$ $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}(a+b)$

$2y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)x = 0 \Rightarrow y^2 = -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{8} / (a-b) \right) x = 0$
 Βρίσκω από εδώ εστία
 και διεύθυνση.

Εστία $E = \left(\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a), 0 \right)$

Διεύθυνση $x = -\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a)$

$g^{-1}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ $g^{-1}(x, y) = (x, y)P$

$g^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) \right)$

$c_0 = (c_1, c_2)$ $t_{c_0}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με $t_{c_0}(v) = c_0 + v$, $\forall v \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

Η εστία της αγγιστής ελλειψας C είναι $(g^{-1} \circ t_{c_0})'(E) =$
 $= \left(\frac{b^2 - a^2 - 2ab - 8\gamma}{8(a-b)}, \frac{b^2 - a^2 - 2ab + 8\gamma}{8(a-b)} \right)$

Η διεύθυνση της αγγιστής είναι η $\delta' = (g^{-1} \circ t_{c_0})'(c) =$

$t_{c_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{16}(a-b), y \right) = \left(\frac{\frac{1}{8}(a^2 + b^2) - \gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)}, y + c_2 \right)$

$t_{c_0}(v) = c_0 + v$ οπου $c_0 = (c_1, c_2)$

και τελικά $f_c(l)$ όπου c' είναι το διάνυσμα

$$c' = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\gamma}{a-\gamma} - \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\gamma}{a-b} \\ \text{αν } n \neq (u_0) \end{pmatrix}$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + a = 0$$

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_2 = \frac{3}{2}$$

$$V\left(-\frac{1}{2}\right) = \langle (1, -1) \rangle$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$$

$$u_1 \in V\left(\frac{1}{2}\right) \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$$

$$u_2 \in V\left(\frac{3}{2}\right) \quad u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = (x, y) P^t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x-y), \frac{1}{\sqrt{2}} (x+y) \right)$$

$$j_0 g_1(x, y) + \delta_0 g_2(x, y) = x+y \quad f(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$j_0 = 0 \quad \delta_0 = \sqrt{2}$$

$$g^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x+y), \frac{1}{\sqrt{2}} (x-y) \right)$$

$$\omega = (c_1, c_2) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$C_\omega = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \left(a - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \text{για } a < \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = \sqrt{2b_0}$$

$$b = \sqrt{\frac{2b_0}{3}}$$

$$b_0 = \frac{1}{3} - a$$

$$b = 2\sqrt{\frac{b_0}{3}}$$

$$e_2' = (y^{-1} \circ t_{\omega}) (e_2)$$

$$e_1 = (y, 0)$$

$$e_2' = (y^{-1} \circ t_{\omega}) (e_2)$$

$$e_2 = (-y, 0)$$

$$e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{b_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-2\sqrt{\frac{b_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)$$

$$e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-2\sqrt{\frac{b_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{b_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)$$

To compare upordien given $2a = 2\sqrt{2b_0}$

